

УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА, УРАВНОВЕШИВАЕМОГО СВЯЗАННЫМИ КОРРЕКТИРУЮЩИМИ ГРУЗАМИ С НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ НА ОСИ ВАЛА РОТОРА*

Исследованы установившиеся движения ротора, уравновешиваемого автобалансиром, состоящим из двух связанных корректирующих грузов с неподвижными точками на оси вала ротора. Установлено существование не более шести существенно различных установившихся движений системы. Найдены условия их существования. Сформулированы условия работоспособности автобалансира.

В [1,2] установлено, что корректирующий груз (КГ) с неподвижной точкой на оси вала ротора проявляет автобалансирующее свойство при выполнении следующих условий относительно главных осей x_1, x_2, x_3 , выходящих из точки подвеса КГ:

$$I_1 = A_1, \quad I_2 = I_3 = B, \quad \mathbf{I}_G = (0, 0, -l)^T. \quad (1)$$

Здесь: I_1, I_2, I_3 - осевые моменты инерции КГ; \mathbf{I}_G - радиус-вектор центра масс КГ относительно точки подвеса; T - знак транспонирования. Идеальному уравновешиванию ротора препятствуют силы тяжести. Поэтому в [3] предложено устанавливать на оси вала ротора два идентичных КГ и связывать их так, чтобы они поворачивались вокруг вторых осей вращения на равные углы в противоположные стороны (рис. 1). Ниже исследуются установившиеся режимы движения ротора, совершающего плоскопараллельное движение и уравновешиваемого двумя связанными КГ.

Предполагается, что КГ имеют относительно ротора две степени свободы: могут поворачиваться вместе на угол ψ вокруг оси вала ротора и на равные углы φ в противоположные стороны вокруг осей, проходящих через их точки подвеса и перпендикулярных оси вала. Ротор расположен вертикально и его удерживают изотропные вязкоупругие опоры. Для описания движения ротора используем оси $Oxyz$, которые вращаются вместе с ротором с постоянной скоростью ω , причем ось z совпадает с осью вращения и точка O находится на уровне общего центра масс КГ. Вспомогательные оси $Kuvw$ жестко связаны с ротором и параллельны осям $Oxyz$, причем ось w совпадает с осью вала ротора и при отсутствии отклонения вала от оси вращения точки K и O совпадают. Относительно этих осей центр масс ротора имеет координаты $(\epsilon \cos \gamma, \epsilon \cos \gamma, 0)^T$,

где: e - эксцентриситет; γ - угол, определяющий направление вектора дисбаланса.

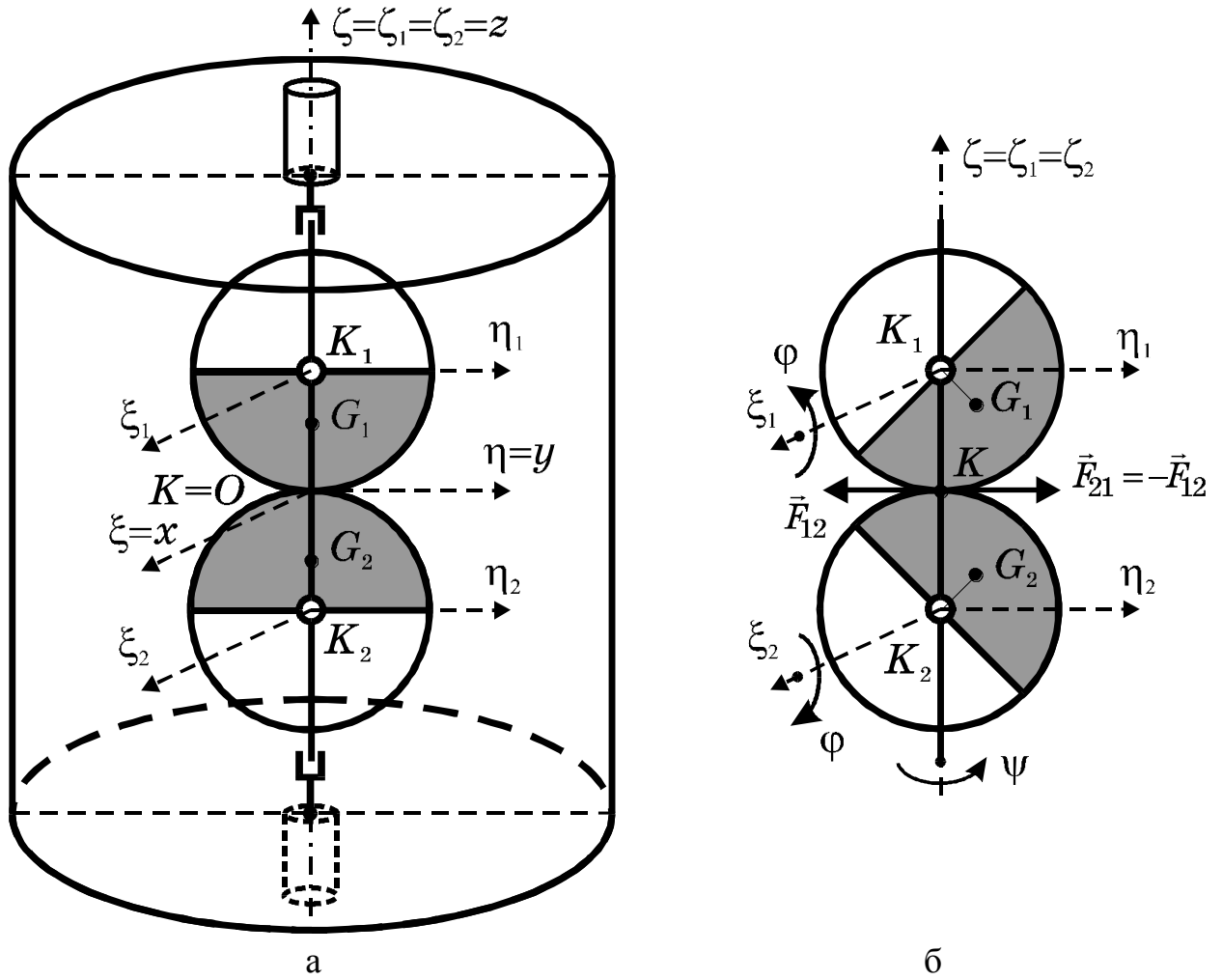


Рис. 1

В процессе движения вал отклоняется от оси вращения на $\mathbf{r}_K = \mathbf{OK}$ и на него начинают действовать восстанавливающая сила $-c\mathbf{r}_K$ и сила вязкого сопротивления $-H_B \mathbf{v}_K$, где c - жесткость, H_B - коэффициент вязкого сопротивления опор, $\mathbf{v}_K = d\mathbf{r}_K/dt$ - абсолютная скорость оси вала ротора (точки K). Для описания движения КГ используем оси $K_i u_i v_i w_i$, которые выходят из точки подвеса i -го КГ и параллельны осям $Kuvw$, и оси $K_i \xi_i \eta_i \zeta_i$, которые выходят из точки подвеса i -го КГ и получаются из осей $K_i u_i v_i w_i$ после поворота на угол y вокруг оси w_i .

Уравнения установившихся движений системы имеют вид:

$$\begin{aligned} s_1 &= (\tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}) R_\omega^2 \cos \tilde{\varphi} = 0, \\ s_2 &= (\tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}) R_\omega^2 \sin \tilde{\varphi} = 0, \\ s_3 &= (R_\omega^2 - 1) \tilde{\xi} + H R_\omega \tilde{\eta} + R_m R_\omega^2 (u_0 - \sin \tilde{\varphi} \sin \tilde{\psi}), \\ s_4 &= -H R_\omega \tilde{\xi} + (R_\omega^2 - 1) \tilde{\eta} + R_m R_\omega^2 (v_0 + \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\psi}), \end{aligned} \quad (2)$$

где: $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ - установившиеся значения безразмерных переменных, определяющих положение системы;

$$\xi = xl/\rho_1^2, \eta = yl/\rho_1^2 \quad (3)$$

- безразмерные переменные;

$$R_m = 2ml^2/M_\Sigma \rho_1^2, R_\omega = \omega/\omega_0, R_p = \rho_2/\rho_1, \\ H = \frac{H_B}{M_\Sigma \omega_0}, u_0 = \frac{Me}{2ml} \cos \gamma, v_0 = \frac{Me}{2ml} \sin \gamma \quad (4)$$

- безразмерные параметры, причём в (3), (4)

$$\omega_0 = \sqrt{c/M_\Sigma}, \rho_1 = \sqrt{A/m}, \rho_2 = \sqrt{B/m}, \quad (5)$$

где: ω_0 - резонансная частота - частота собственных колебаний ротора при неподвижном относительно ротора КГ, отсутствии вращения ротора и не учёте сил сопротивления; $M_\Sigma = M + 2m$ - масса всей системы; $\rho_{1/2}$ - осевые радиусы инерции КГ.

Из (2) видно, что установившиеся движения делятся на три группы. В первой группе устранено отклонение вала от оси вращения: $\tilde{\xi} = \tilde{\eta} = 0$. С учётом этого из последних двух уравнений в (2) находим следующие существенно различные решения:

$$\tilde{\psi}_{1/2} = \gamma + \pi/2, \tilde{\varphi}_1 = \varphi_0, \tilde{\varphi}_2 = \pi - \varphi_0, \varphi_0 = \arcsin Me/2ml. \quad (6)$$

Из (6) следует, что вторые оси вращения КГ перпендикулярны вектору дисбаланса. Поскольку ротор в этих движениях уравновешен, то это два основных установившихся движения системы. Положения КГ в этих движениях изображены на рис. 2, а, б.

В установившихся движениях второй группы

$$\cos \tilde{\varphi} = 0, \tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi} = 0. \quad (7)$$

Решениями второго уравнения в (7) будут

$$\cos \tilde{\psi} = \pm \tilde{\eta}/\tilde{r}, \sin \tilde{\psi} = \mp \tilde{\xi}/\tilde{r}, \tilde{r} = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2}. \quad (8)$$

Из этого следует, что вторые оси вращения КГ перпендикулярны вектору отклонения вала от оси вращения. Первое уравнение в (7) допускает следующие два существенно различные решения:

$$\tilde{\varphi}_3 = -\pi/2, \tilde{\varphi}_4 = \pi/2. \quad (9)$$

В этих движениях КГ максимально отклонены в направлении отклонения вала от оси вращения или в противоположную сторону.

Из (2) находим:

$$s_3 \cos \tilde{\psi} + s_4 \sin \tilde{\psi} = \pm H R_\omega \tilde{r} - R_m R_\omega^2 (u_0 \cos \tilde{\psi} + v_0 \sin \tilde{\psi}) = 0. \quad (10)$$

При отсутствии сил сопротивления ($H=0$) уравнение принимает вид

$$u_0 \cos \tilde{\psi} + v_0 \sin \tilde{\psi} = 0. \quad (11)$$

Его решениями будут

$$\cos \tilde{\psi} = \pm v_0/e_0 = \pm \cos \gamma, \sin \tilde{\psi} = \mp u_0/e_0 = \mp \sin \gamma,$$

$$e_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2} = Me/2ml = \sin\varphi_0. \quad (12)$$

Из уравнений (12) находим следующие существенно различные значения угла $\tilde{\psi}$:

$$\tilde{\psi}_{3/4} = \gamma \pm \pi/2. \quad (13)$$

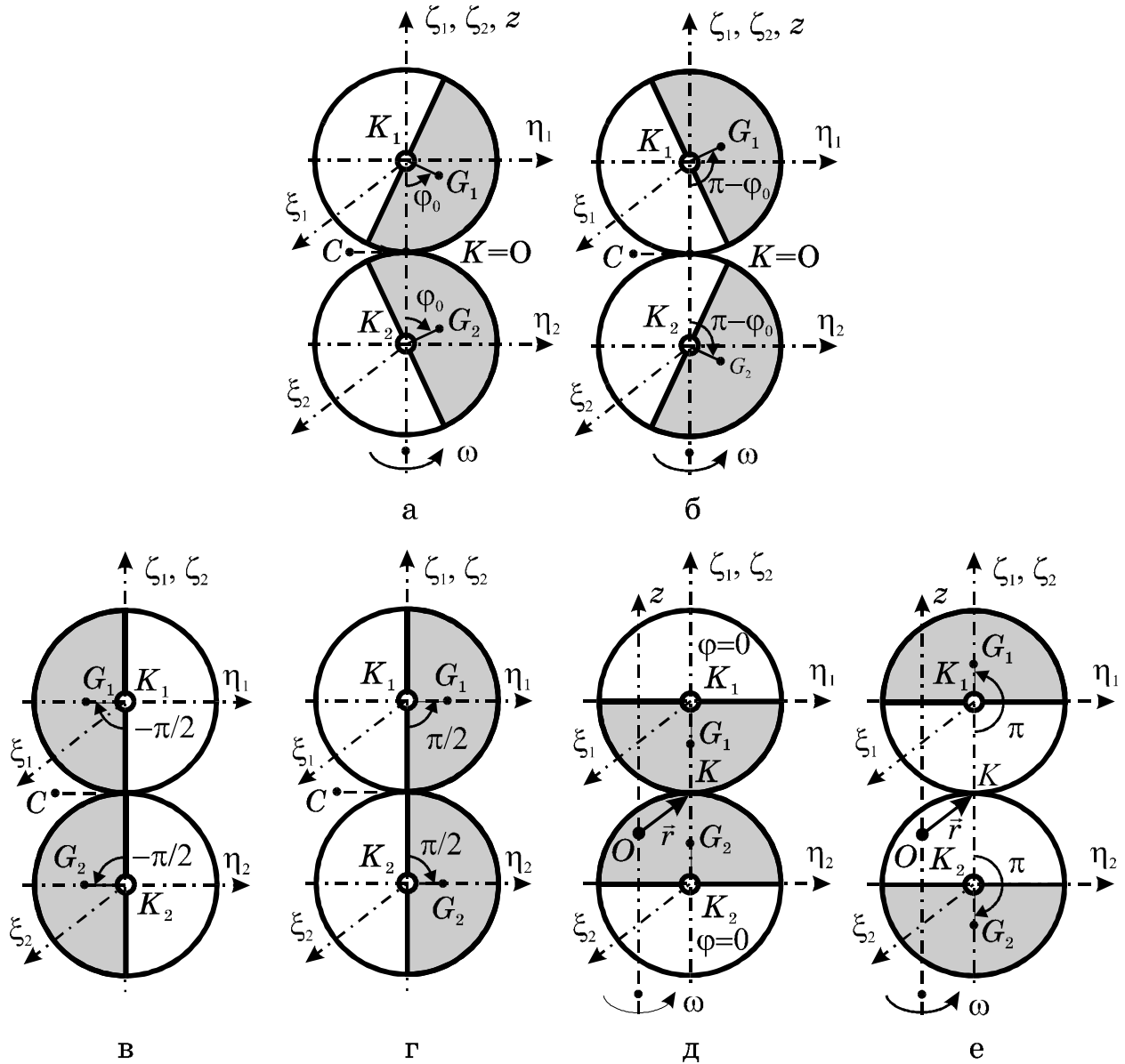


Рис.2

Из этого следует, что вторые оси вращения КГ перпендикулярны вектору дисбаланса, и КГ максимально отклонены в движениях $\tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_4$ соответственно в тяжёлую и лёгкую стороны ротора.

Исследуем влияние сил трения. Не ограничивая общности исследований, можно полагать, что

$$v_0 = 0, \quad u_0 = \sin\varphi_0 > 0. \quad (14)$$

Введём новые переменные

$$u = \tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi}, \quad v = \tilde{\xi} \cos \tilde{\psi} + \tilde{\eta} \sin \tilde{\psi}. \quad (15)$$

Тогда уравнения установившихся движений приводятся к виду

$$\begin{aligned} s_1 = uR_\omega^2 \cos \tilde{\varphi} &= 0, & s_2 = vR_\omega^2 \sin \tilde{\varphi} &= 0, \\ s_3 \sin \tilde{\psi} - s_4 \cos \tilde{\psi} &= (R_\omega^2 - 1)u + HR_\omega v + R_m R_\omega^2 (\sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} - \sin \tilde{\varphi}) = 0, \\ s_3 \cos \tilde{\psi} + s_4 \sin \tilde{\psi} &= -HR_\omega u + (R_\omega^2 - 1)v + R_m R_\omega^2 \sin \varphi_0 \cos \tilde{\psi} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для рассматриваемых побочных движений

$$\cos \tilde{\varphi} = 0, \quad \sin \tilde{\varphi} = \pm 1, \quad v = 0. \quad (17)$$

Первые два уравнения в (16) выполняются тождественно. Последние два уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} (R_\omega^2 - 1)u + R_m R_\omega^2 (\sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} \mp 1) &= 0, \\ -HR_\omega u + R_m R_\omega^2 \sin \varphi_0 \cos \tilde{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из второго уравнения в (18) находим $u = \frac{R_m R_\omega^2}{HR_\omega} \sin \varphi_0 \cos \tilde{\psi}$. Подставляя это в

первое уравнение в (18) и сокращая на $R_m R_\omega^2$, получим

$$\frac{R_\omega^2 - 1}{HR_\omega} \sin \varphi_0 \cos \tilde{\psi} + (\sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} \mp 1) = 0. \quad (19)$$

Исследуем графически корни уравнения (19). Для этого представим его в виде

$$a \cos \tilde{\psi} = \sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} \mp 1, \quad a = \frac{1 - R_\omega^2}{HR_\omega} \sin \varphi_0. \quad (20)$$

Не ограничивая общности исследований, полагаем в уравнении (20) знак “-“ перед 1. На рис. 3 построим графики функций: $\sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} - 1$ - сплошная толстая линия; $a \cos \tilde{\psi}$ (для различных значений параметра a) - остальные линии. Точки пересечения этих графиков и будут определять корни уравнения (20). Рассматриваем постепенное возрастание R_ω от 0 до 1 и от 1 до $+\infty$. Выделяем следующие случаи.

1. При $R_\omega \sim +0$ параметр $a \gg 1$. График функции $a \cos \tilde{\psi}$ на рис. 3, а изображен сплошной тонкой линией. Из рисунка видно, что уравнение (20) допускает следующие два корня

$$\tilde{\psi}_1 = -\pi/2 - 0, \quad \tilde{\psi}_2 = \pi/2 + 0. \quad (21)$$

Из этого следует, что вторые оси вращения КГ практически перпендикулярны вектору дисбаланса. Далее, в движении $\tilde{\psi}_1$ КГ отклонено в тяжёлую сторону ротора, а в движении $\tilde{\psi}_2$ - в лёгкую.

2. При увеличении R_ω таком, что $R_\omega < 1$ и $a \rightarrow 1$, установившееся движение $\tilde{\psi}_1 \xrightarrow{a \rightarrow 1} -\pi$. На рис. 3, а тонким пунктиром построен график функции $a \cos \tilde{\psi}$ при $a=1$. Для определения R_ω , при котором $a=1$, составляем такое уравнение

$$R_\omega^2 + HR_\omega / \sin \varphi_0 - 1 = 0. \quad (22)$$

Единственное решение уравнения (22), которое меньше 1, следующее

$$R_{\omega}^{(1)} = \sqrt{1 + H^2 / \sin^2 \varphi_0} - H / \sin \varphi_0 \quad (23)$$

При $a=1$ имеем следующее уравнение для определения $\tilde{\psi}_2$:

$$-\cos \tilde{\psi} + \sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} - 1 = 0. \quad (24)$$

Представим угол $\tilde{\psi}_2$ в виде

$$\tilde{\psi}_2 = \pi/2 + \Delta_2, \quad \Delta_2 < \pi/2. \quad (25)$$

Тогда уравнение (24) приводится к виду

$$x - 1 + \sqrt{1 - x^2} \sin \varphi_0 = 0, \quad x = \sin \Delta_2. \quad (26)$$

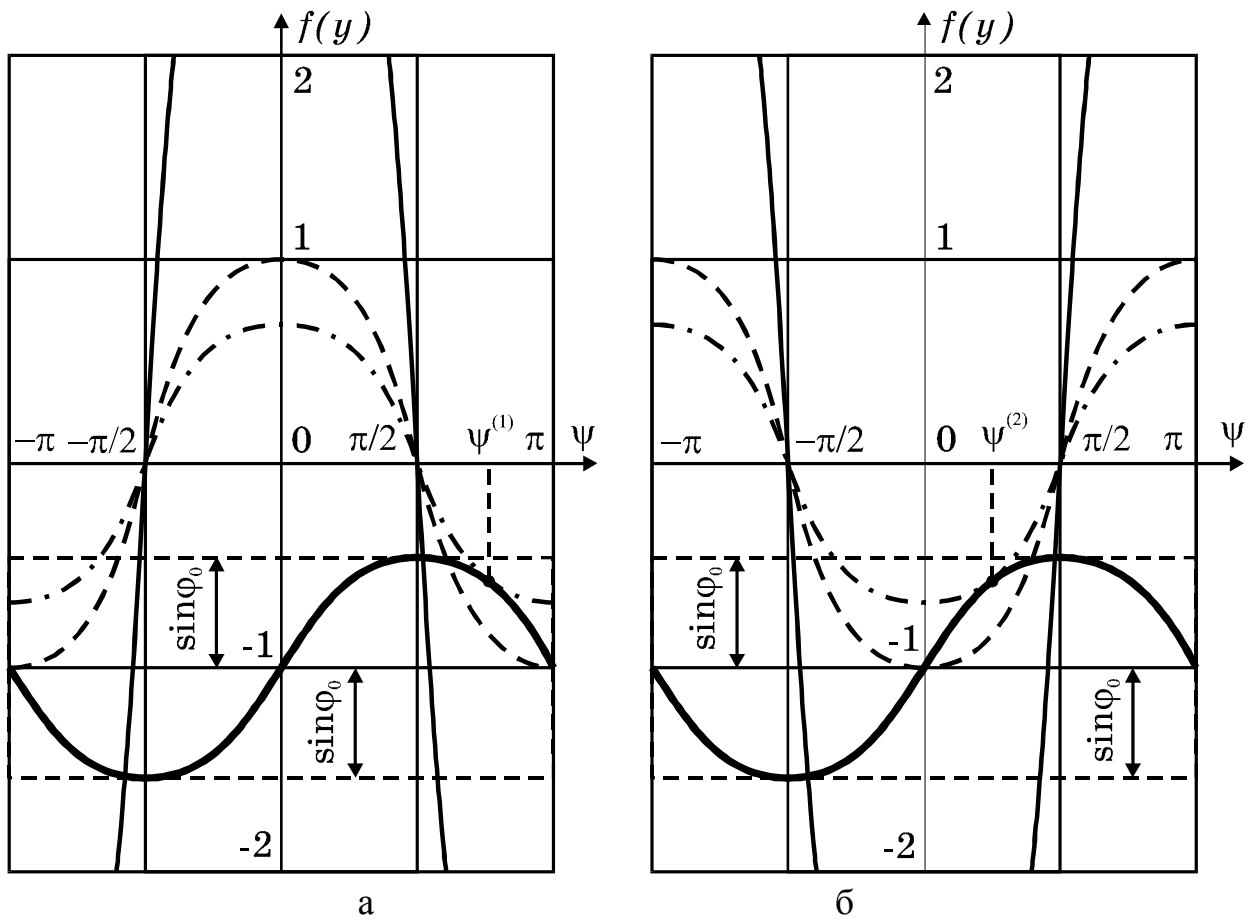


Рис. 3

Единственное решение уравнения (26), дающее острый угол для Δ_2 :

$$\Delta_2 = \arcsin \frac{\cos^2 \varphi_0}{1 + \sin^2 \varphi_0}. \quad (27)$$

3. При дальнейшем увеличении R_{ω} видно, что существует $R_{\omega}^{(2)}$, при котором $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2 = \tilde{\psi}^{(1)}$. На рис. 3, а тонким штрих пунктиром построен график функции $a \cos \tilde{\psi}$ при $R_{\omega} = R_{\omega}^{(2)}$. Поскольку кривые имеют общую касательную, то

$$\frac{R_{\omega}^2 - 1}{HR_{\omega}} \sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} = \sin \varphi_0 \cos \tilde{\psi},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \tilde{\psi} = \frac{HR_{\omega}}{R_{\omega}^2 - 1}, \quad \sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} = \frac{HR_{\omega}}{R_{\omega}^2 - 1} \sin \varphi_0 \cos \tilde{\psi}. \quad (28)$$

Подставляя второе равенство из (28) в уравнение (20), получим

$$\cos \tilde{\psi} = \frac{HR_{\omega}(R_{\omega}^2 - 1)}{\left[\frac{R_{\omega}^2 - 1}{\sin^2 \varphi_0} + H^2 R_{\omega}^2 \right] \sin \varphi_0}. \quad (29)$$

Используя (28) и тождество $\cos^2 \tilde{\psi} = 1 / (1 + \operatorname{tg}^2 \tilde{\psi})$, после преобразований получим следующее уравнение для определения $R_{\omega}^{(2)}$:

$$[(R_{\omega}^2 - 1) \sin \varphi_0 - HR_{\omega} \cos \varphi_0][(R_{\omega}^2 - 1) \cos \varphi_0 + HR_{\omega} \sin \varphi_0] = 0. \quad (30)$$

Требуемую величину $R_{\omega}^{(2)}$ даёт только решение уравнения во вторых квадратных скобках в (30):

$$(R_{\omega}^2 - 1) \cos \varphi_0 + HR_{\omega} \sin \varphi_0 = 0. \quad (31)$$

Это решение

$$R_{\omega}^{(2)} = \sqrt{1 + H^2 / \operatorname{tg}^2 \varphi_0} - H / \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (32)$$

Из (31) находим $HR_{\omega} / (R_{\omega}^2 - 1) = -\operatorname{tg} \varphi_0$. Подставляя это в первое уравнение в (28), получим такое уравнение для определения $\tilde{\psi}^{(1)}$: $\operatorname{tg} \tilde{\psi} = -\operatorname{tg} \varphi_0$.

Единственное решение этого уравнения, которое меньше π :

$$\tilde{\psi}^{(1)} = \pi - \varphi_0. \quad (33)$$

4. При дальнейшем увеличении R_{ω} , таком, что $R_{\omega}^{(2)} < R_{\omega} < R_{\omega}^{(3)}$, $R_{\omega}^{(3)} > 1$ у уравнения нет решений, поскольку кривые не пересекаются. Из рис. 3, б видно, что при $R_{\omega} = R_{\omega}^{(3)}$ у кривых $\sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} - 1$ (сплошная толстая линия) и $a \cos \tilde{\psi}$ (тонкий штрих пунктир) появляется точка касания. При этом $\tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}_2 = \tilde{\psi}^{(2)}$. Поэтому, для определения $R_{\omega}^{(3)}$ можно использовать уравнение (30). Требуемую величину $R_{\omega}^{(3)}$ даёт только решение уравнения в первых квадратных скобках в (30):

$$(R_{\omega}^2 - 1) \cos \varphi_0 - HR_{\omega} \sin \varphi_0 = 0. \quad (34)$$

Это решение

$$R_{\omega}^{(3)} = \sqrt{1 + H^2 / \operatorname{tg}^2 \varphi_0} + H / \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (35)$$

Из (34) находим $HR_{\omega} / (R_{\omega}^2 - 1) = \operatorname{tg} \varphi_0$. Подставляя это в первое уравнение в (28), получим такое уравнение для определения $\tilde{\psi}^{(2)}$: $\operatorname{tg} \tilde{\psi} = \operatorname{tg} \varphi_0$. Единственное решение этого уравнения, которое меньше $\pi/2$:

$$\tilde{\psi}^{(2)} = \varphi_0. \quad (36)$$

5. При увеличении R_{ω} таком, что $R_{\omega} > R_{\omega}^{(3)}$ и $a \rightarrow -1$, установившееся движение $\tilde{\psi}_1 \xrightarrow{a \rightarrow -1} 0$. На рис. 3, б тонким пунктиром построен график

функции $a \cos \tilde{\psi}$ при $a=-1$. Для определения $R_{\omega}^{(4)}$, при котором $a=-1$, составляем такое уравнение

$$R_{\omega}^2 - HR_{\omega}/\sin \varphi_0 - 1 = 0. \quad (37)$$

Единственное решение уравнения (37), которое больше 1, следующее

$$R_{\omega}^{(4)} = \sqrt{1 + H^2/\sin^2 \varphi_0} + H/\sin \varphi_0 \quad (38)$$

При $a=-1$ имеем следующее уравнение для определения $\tilde{\psi}_2$:

$$\cos \tilde{\psi} + \sin \varphi_0 \sin \tilde{\psi} - 1 = 0. \quad (39)$$

Представим угол $\tilde{\psi}_2$ в виде

$$\tilde{\psi}_2 = \pi/2 - \Delta_3, \quad \Delta_3 < \pi/2. \quad (40)$$

Тогда уравнение (39) приводится к виду (26) и угол $\Delta_3 = \Delta_2$.

6. При дальнейшем увеличении R_{ω} параметр a неограниченно по модулю возрастает. На рис. 3, б тонкой сплошной линией изображен график функции $a \cos \tilde{\psi}$ при $|a| \gg 1$. Из рисунка видно, что

$$\tilde{\psi}_1 \xrightarrow{R_{\omega} \rightarrow +\infty} -\pi/2, \quad \tilde{\psi}_2 \xrightarrow{R_{\omega} \rightarrow +\infty} \pi/2. \quad (41)$$

В первом движении КГ максимально отклонены в тяжелую сторону ротора, а во втором - в лёгкую.

Можно показать, что силы трения приводят к отставанию вектора отклонения вала от вектора дисбаланса. Учитывая это, условно считаем, что в движении $\tilde{\varphi}_3$ КГ отклонены в более тяжёлую сторону ротора, а в движении $\tilde{\varphi}_4$ - в более лёгкую. Положения КГ в этих движениях изображены на рис. 2, в, г.

В установившихся движениях третьей группы

$$\sin \tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{\xi} \sin \tilde{\psi} - \tilde{\eta} \cos \tilde{\psi} = 0. \quad (42)$$

Решениями второго уравнения в (42) будут

$$\cos \tilde{\psi} = \pm \tilde{\xi}/\tilde{r}, \quad \sin \tilde{\psi} = \pm \tilde{\eta}/\tilde{r}, \quad \tilde{r} = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2}. \quad (43)$$

Из (42), (43) следует, что вторые оси вращения КГ параллельны вектору отклонения вала от оси вращения. Из первого уравнения в (42) находим следующие существенно различные установившиеся движения:

$$\tilde{\varphi}_5 = 0, \quad \tilde{\varphi}_6 = \pi. \quad (44)$$

В движении $\tilde{\varphi}_5$ КГ не отклонены, а в движении $\tilde{\varphi}_6$ повернуты вокруг вторых осей вращения на 180° . Положения КГ в установившихся движениях этой группы изображены на рис. 2, д, е.

Выводы.

1. При отсутствии сил сопротивления в опорах у системы существуют шесть существенно различных установившихся движений: два основных (в которых ротор уравновешен) и четыре побочных (в которых ротор разбалансирован).

2. При наличии сил сопротивления у системы до шести существенно различных установившихся движений, аналогичных предыдущему случаю, причем в окрестности резонансной скорости не существуют два побочных движения, в которых корректирующие грузы отклонены на 90^0 (в более тяжелую или легкую стороны ротора).

3. Для функционирования автобалансира необходимо, чтобы в рабочем диапазоне угловых скоростей вращения ротора устойчивыми были только основные движения, а побочные - были неустойчивы.

Литература

1. *Філімоніхін Г.Б.* Про зрівноваження ротора маятниками, насадженими на осі, що перпендикулярні валу // Доп. НАН України. - 2000. - №6. - С. 66-70.

2. *Филимоныхин Г.Б.* Уравновешивание ротора корректирующим грузом с неподвижной точкой на оси вала // Загальнодержавний міжвідомчий н.-т. збірник "Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин", - 2000. Вип.№29, С.103-108.

3. *Філімоніхін Г.Б., Невдаха Ю.А.* Зменшення чутливості автобалансирів до сил ваги шляхом накладання в'язей // Збірник наукових праць КДТУ, -2000. Вип.№6, С.16-19.